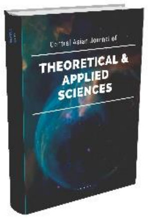

CENTRAL ASIAN JOURNAL OF THEORETICAL AND APPLIED SCIENCES

Volume: 02 Issue: 10 | Oct 2021 ISSN: 2660-5317

Негладкая Задача Оптимального Управления Для Динамической Системы С Параметром

Отакулов Салим
доктор физико-математических наук, профессор Джизакский политехнический институт, Джизак, Узбекистан
Хайдаров Тулкинджон Тургунбаевич
Джизакский политехнический институт, Джизак, Узбекистан

Received 17th Aug 2021, Accepted 4th Sep 2021, Online 28h Oct 2021

Аннотация: *В работе рассматривается динамическая система управления с параметром и неточно заданным начальным состоянием. Для этой системы изучена задача управления по негладкому терминальному функционалу. Получены необходимые и достаточные условия оптимальности.*

Ключевые слова: *динамическая система, задача управления, параметр системы, негладкий функционал, условия оптимальности.*

1. Введение.

Задачи на максимум и минимум функционалов возникают как оптимизационные модели прикладных задач из различных областей экономики и техники. В настоящее время для таких задач развита математическая теория оптимизации. Она имеет большое значение в проблемах принятия оптимального решения. В прикладных исследованиях широкие приложения имеют такие разделы теории оптимизации, как математическое программирование, исследование операций, вариационное исчисление и математическая теория оптимального управления [1, 2, 6, 10,15].

Математическое моделирование разнообразных задач экономики и техники, таких, как принятия наилучшего решения в экономическом планировании и организации производства, при проектировании технических устройств и управлении технологическими процессами приводят к задачам оптимизации с негладкими целевыми функциями. В результате исследований задач оптимизации, связанных с проблемами управления сложных систем и принятия решения в условиях неопределенности, развиты методы негладкой оптимизации, негладкого и многозначного анализа [3,4,8, 15].

Одним из подходов, приводимых к негладким задачам оптимизации, является принцип минимакса [7]. Данный принцип используется при принятии решения в условиях неполноты информации о начальных данных и параметров внешних воздействий [9]. В случае, когда информация о неточных параметрах минимальная, т.е. известно лишь допустимая область их изменения, согласно данному принципу ставится цель, заключающаяся получения гарантированного значения критерия качества управления. Такая цель управления обычно выражается как задача оптимизации негладкой функции типа максимума или минимума.

Каждая негладкая функция, возникающая в результате максимизации или минимизации функционала по определенному параметру, имеют специфику, связанную с заданием самого функционала и ограничений на параметры. Поэтому эффективность методов решения негладкой задачи оптимизация существенно зависит от вида целевых функций и заданных ограничений на параметры системы [3,4].

В исследованиях систем управления \широко используются модели, описываемые дифференциальными включениями с параметрами. Модели динамических систем в виде управляемых дифференциальных включений представляют большой интерес в проблемах управления и принятия решения в условиях информационных ограничений. Для таких моделей изучаются задачи оптимального управления ансамблями траекторий [5,11,12]. Обычно в этих задачах рассматриваются негладкие критерии оптимизации.

В данной работе рассматривается динамическая система управления, описываемая линейным дифференциальным уравнением с параметром. Информация о начальном состоянии системы ограничивается лишь известным множеством возможных значений. В качестве критерия оценки качества управления рассматривается терминальный функционал типа функции максимума. Для данной модели изучается максиминная задача управления ансамблем траекторий. Рассматриваемая задача исследуется методами динамических систем управления, выпуклого и многозначного анализа[13,14]. Полученные результаты развивают результаты работ [16,17]

2. Постановка задачи. Методы исследования.

Рассмотрим динамическую систему управления с параметрами вида

$$\dot{x} = A(t,y)x + b(t,u,y), t \in T = [t_0, t_1], \; x(t_0) \in D, \; u \in V(y), \; y \in Y, \qquad (1)$$

где $x - n$-вектор состояния, $u - m$-вектор управления, $y - k$-мерный параметр, $A(t,y) - n \times n$-матрица, $b(t,u,y) -$ n-вектор функция. В данной системе управления информация о начальном состоянии системы ограничена тем, что известно только выпуклое компактное множество $D \subset R^n$ возможных начальных состояний. Еще одна особенность системы заключается в том, что в процессе управления участвует параметр $y \in Y$, значение которого сохраняется постоянным в рассматриваемом отрезке времени $T = [t_0, t_1]$. Область значений управления $u = u(t)$ является выпуклым компактным подмножеством $V(y)$ пространства R^m, непрерывно зависящим от параметра $y \in Y$. Множество Y также будем считать компактным подмножеством пространства R^k.

Относительно правой части дифференциального уравнения (1) будем предполагать, что выполнены следующие условия:

1) элементы матрицы $A(t,y)$ суммируемы по $t \in T$ и непрерывны по $y \in Y$, причем $\|A(t,y)\| \le \alpha(t)$, $\alpha(\cdot) \in L_1(T)$;

2) каждая компонента n-вектор функции $(t,u,y) \to b(t,u,y)$ измерима по $t \in T$ и непрерывна по $(u,y) \in V \times Y$, причем $\|b(t,u,y)\| \le \beta(t)$, $\beta(\cdot) \in L_1(T)$.

Допустимыми управлениями для системы (1) будем считать каждую измеримую ограниченную m-вектор-функцию $u = u(t)$, $t \in T$, принимающие почти всюду на T значения из $V(y)$ при некотором $y \in Y$.

Обозначим через $U_T(y)$– множество допустимых управлений $u = u(\cdot)$, таких, что $u(t) \in V(y)$, $t \in T$.

Допустимыми траекториями системы управления (1) назовем каждую абсолютно непрерывную функцию $x = x(t,u,y)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнения (1) почти всюду на $T = [t_0, t_1]$ и начальному условию $x(t_0) \in D$ при заданном управлении $u \in U_T(y)$ и параметра $y \in Y$.

Обозначим через $H_T(u,y)$–множество всех допустимых траекторий, соответствующих допустимому управлению $u \in U_T(y)$ и параметра $y \in Y$.

Согласно результатам работ [11,16] при заданных условиях $H_T(u,y)$ является выпуклым компактным множеством в пространстве непрерывных n-вектор-функций $C^n(T)$.

Пусть качество управления динамической системой (1) оценивается негладким терминальным функционалом

$$J(x(\cdot), y) = \sum_{i=1}^{l} \max_{z \in Z_i} (P_i(y)x(t_1), z), \qquad (2)$$

где $P_i(y) - s \times n$-матрица, непрерывно зависящая от параметра $y \in Y$, Z_i –замкнутое ограниченное множество из R^s. Учитывая, что начальное состояние системы (1) задано неточно, будем считать, что целью управления является достижение гарантированного значения критерия качества $J(x(\cdot), y)$ вида (2), т.е. будем мксимизировать функционал $G(u(\cdot), y) = \min_{x(\cdot) \in H_T(u,y)} J(x(\cdot), y)$. Иначе говоря, для системы (1) рассмотрим следующую максиминную задачу:

$$\min_{x(\cdot) \in H_T(u,y)} J(x(\cdot), y) \to \max, u \in U_T(y), y \in Y. \qquad (3)$$

Будем изучать необходимые и достаточные условия оптимальности для максиминной задачи (3).

Рассмотрим множество, состоящее из концов всех траекторий $x(\cdot) \in H_T(u,y)$ в момент времени $t_1 > t_0$:

$$X_T(t_1, u, y) = \{\xi \in R^n \mid \xi = x(t_1), x(\cdot) \in H_T(u,y)\}.$$

В силу результатов работ [11,16] $X_T(t_1,u,y)$ является выпуклым компактом из R^n.

Положим: $\sigma(X, \psi) = \min_{\xi \in X} (\xi, \psi)$. Функционал $G(u(\cdot), y) = \min_{x(\cdot) \in H_T(u,y)} J(x(\cdot), y)$ имеет следующее представление:

$$G(u(\cdot), y) = \max_{z_i \in coZ_i, i=\overline{1,l}} \sigma(X_T(t_1, u, y), \sum_{i=1}^{l} P_i' z_i), \qquad (4)$$

где coZ_i – выпуклая оболочка множества Z_i.

В самом деле, имеем:

$$\min_{x(\cdot)\in H_T(u,y)} J(x(\cdot),y) = \min_{\xi\in X_T(t_1,u,y)} \sum_{i=1}^{l} \max_{z\in Z_i}(P_i(y)\xi, z),$$

$$\sum_{i=1}^{l} \max_{z\in Z_i}(P_i(y)\xi, z) = \max_{z_i\in Z_i, i=\overline{1,l}}\left(\xi, \sum_{i=1}^{l} P_i'(y) z_i\right) = \max_{z_i\in coZ_i, i=\overline{1,l}}\left(\xi, \sum_{i=1}^{l} P_i'(y) z_i\right).$$

Теперь, используя известную из выпуклого анализа, теорему о минимаксе [13], получим

$$\min_{\xi\in X_T(u,y)} \sum_{i=1}^{l} \max_{z\in Z_i}(P_i(y)\xi, z) = \max_{z_i\in coZ_i, i=\overline{1,l}} \min_{\xi\in X_T(t_1,u,y)}\left(\xi, \sum_{i=1}^{l} P_i'(y) z_i\right).$$

Следовательно,

$$G(u(\cdot),y) = \min_{x(\cdot)\in H_T(u,y)} J(x(\cdot),y) = \max_{z_i\in coZ_i, i=\overline{1,l}} \min_{\xi\in X_T(t_1,u,y)}(\xi, \sum_{i=1}^{l} P_i'(y) z_i) =$$

$$= \max_{z_i\in coZ_i, i=\overline{1,l}} \sigma(X_T(t_1,u,y), \sum_{i=1}^{l} P_i'(y) z_i),$$

т.е. имеет место представление (4).

Учитывая формулу (4), максиминную задачу (3) можно записать в следующем виде:

$$\max_{z_i\in coZ_i, i=\overline{1,l}} \sigma(X_T(t_1,u,y), \sum_{i=1}^{l} P_i'(y) z_i)) \to \max, u(\cdot)\in U_T(y), y\in Y. \qquad (5)$$

Таким образом, максиминная задача (3) сведена к задаче повторной максимизации вида (5). Из вида данной задачи ясно, что она является задачей оптимального управления терминальным состоянием $X_T(t_1,u,y)$ ансамбля траекторий динамической системы (1).

Пусть $F_y(t,\tau)$ – фундаментальная матрица решений уравнения $\dot{x} = A(t,y)x$, т.е.

$$\frac{\partial F_y(t,\tau)}{\partial t} = A(t,y)F_y(t,\tau),\ t\in T, \tau\in T,\ F_y(\tau,\tau) = E,$$

E – единичная $n\times n$-матрица. Воспользовавшись формулой Коши [1] для абсолютно непрерывного решения уравнения (1), легко убедиться, что множество $X_T(t_1,u,y)$ имеет следующее представление:

$$X_T(t_1,u,y) = F_y(t_1,t_0)D + \int_{t_0}^{t_1} F_y(t_1,\tau)b(\tau,u(\tau),y)d\tau. \qquad (6)$$

Тогда, в силу формулу (6), имеем:

$$\sigma(X_T(t_1,u,y),\psi) = \sigma(F_y(t_1,t_0)D,\psi) + \int_{t_0}^{t_1} (F_y(t_1,\tau)b(\tau,u(\tau),y),\psi)d\tau. \qquad (7)$$

3. Результаты исследования.

Рассмотрим функцию $\psi(t,y,z)=F_y'(t_1,t)\sum_{i=1}^{l}P_i'(y)z_i$, $z=(z_1,z_2,...,z_l)$. Тогда согласно формуле (7) имеем:

$$\sigma(X_T(t_1,u,y),\psi(t_0,y,z))=\sigma(F_y(t_1,t_0)D,\psi(t_0,y,z))+\int_{t_0}^{t_1}(F_y(t_1,\tau)b(\tau,u(\tau),y),\psi(t_0,y,z))d\tau.$$

Введем функционалы:

$$\mu(u,y)=\max_{z_i\in coZ_i,i=\overline{1,l}}[\sigma(D,\psi(t_0,y,z))+\int_{t_0}^{t_1}(b(t,u(t),y),\psi(t,y,z))dt],u=u(\cdot)\in U_T(y),y\in Y, \quad (8)$$

$$\gamma(y,z)=C(D,\psi(t_0,y,z))+\int_{t_0}^{t_1}\max_{v\in V(y)}(b(t,v,y),\psi(t,y,z))dt,y\in Y,z=(z_1,z_2,...,z_l),z_i\in coZ_i. \quad (9)$$

Рассмотрим график многозначного отображения $y\to U_T(y),y\in Y$:

$\Gamma_{U_T}=\{(y,u):y\in Y,u\in U_T(y)\}$.

Из определения множества допустимых управлений $U_T(y)$, наложенных на область управления $V(y)$ легко следует, что значения многозначного отображения $y\to U_T(y),y\in Y$ являются выпуклыми, замкнутыми и ограниченными подмножествами пространств $L_2^m(T)$. Кроме того, оно непрерывно на компакте $Y\subset R^k$. Следовательно, согласно результатам теории многозначных отображений [14] справедливы следующие утверждения:

Лемма1. Многозначное отображение $y\to U_T(y),y\in Y$ замкнуто и ограничено, т.е. его график является замкнутым и ограниченным подмножеством пространства $R^k\times L_2^m(T)$.

Лемма2. Функционалы $\mu(u,y)$ и $\gamma(y,z)$ непрерывны на множествах $\Gamma_{U_T}=\{(y,u):y\in Y,u\in U_T(y)\}$ и $Q=\{(y,z):y\in Y,z=(z_1,z_2,...,z_l),z_i\in coZ_i\}$, соответственно.

Теорема. Для оптимальности управления $u^0(\cdot)$ и параметра y^0 в задаче (3) необходимо и достаточно существование $z^0=(z_1^0,z_2^0,...,z_l^0),z_i^0\in coZ_i$ такой, что $\max_{z_i\in coZ_i,i=\overline{1,l}}\gamma(y^0,z)=\gamma(y^0,z^0)$ и выполнение следующих условий:

$$\max_{z_i\in coZ_i,i=\overline{1,l}}\gamma(y^0,z)=\max_{y\in Y}\max_{z_i\in coZ_i,i=\overline{1,l}}\gamma(y,z), \quad (10)$$

$$\max_{v\in V(y^0)}(b(t,v,y^0),\psi(t,y^0,z^0))=(b(t,u^0(t),y^0),\psi(t,y^0,z^0)) \text{ п.в. на } T. \quad (11)$$

Доказательство. ***Необходимость.*** Выше была показана, что максиминная задача (3) приводится к задаче повторной максимизации вида (5). Согласно формуле (7) эту задачу с помощью функционала (8) можно записать в следующем виде:

$$\mu(u,y)\to\max,u\in U_T(y),y\in Y. \quad (12)$$

Пусть управление $u^0(\cdot)$ и параметр y^0 оптимальные в рассматриваемой задаче (3). Поскольку задача (3) эквивалентна задаче (12), то

$$\mu(u^0, y^0) = \max_{u\in U_T(y), y\in Y} \mu(u, y).$$

Тогда, ясно что

$$\max_{u\in U_T(y^0)} \mu(u, y^0) = \max_{y\in Y} \max_{u\in U_T(y)} \mu(u, y). \qquad (13)$$

Согласно (8) и (9)

$$\max_{u\in U_T(y)} \mu(u, y) = \max_{z_i\in coZ_i, i=\overline{1,l}} \gamma(y, z).$$

Поэтому соотношение (13) можно записать в виде

$$\max_{z_i\in coZ_i, i=\overline{1,l}} \gamma(y^0, z) = \max_{y\in Y} \max_{z_i\in coZ_i, i=\overline{1,l}} \gamma(y, z),$$

т.е. справедливо равенство (10).

Пусть $z^0 = (z_1^0, z_2^0, ..., z_l^0), z_i^0 \in coZ_i$ – произвольная точка глобального минимума функции

$$\eta^0(z) = C(D, \psi(t_0, y^0, z)) + \int_{t_0}^{t_1} (b(t, u^0(t), y^0), \psi(t, y^0, z))dt, \ \ z = (z_1, z_2, ..., z_l), z_i \in coZ_i .$$

В силу непрерывности функции $\eta^0(z)$ и компактности множеств coZ_i такая точка $z^0 = (z_1^0, z_2^0, ..., z_l^0), z_i^0 \in coZ_i$ существует. Тогда имеем:

$$\sigma(D, \psi(t_0, y^0, z^0)) + \int_{t_0}^{t_1} \max_{v\in V(y^0)} (b(t, v, y^0), \psi(t, y^0, q^0))dt \le$$

$$\le \max_{z_i\in coZ_i, i=\overline{1,l}} [\sigma(D, \psi(t_0, y^0, z)) + \int_{t_0}^{t_1} \max_{v\in V(y^0)} (b(t, v, y), \psi(t, y^0, z))dt] = \max_{u\in U_T(y^0)} \mu(u, y^0) = \mu(u^0, y^0) =$$

$$= \max_{z_i\in coZ_i, i=\overline{1,l}} [\sigma(D, \psi(t_0, y^0, z)) + \int_{t_0}^{t_1} (b(t, u^0(t), y^0), \psi(t, y^0, z))dt = C(D, \psi(t_0, y^0, q^0)) +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} (b(t, u^0(t), y^0), \psi(t, y^0, q^0))dt \le \sigma(D, \psi(t_0, y^0, z^0)) + \int_{t_0}^{t_1} \max_{v\in V(y^0)} (b(t, v, y), \psi(t, y^0, z^0))dt \cdot$$

Из этой цепочки неравенств следует, что $\gamma(y^0, z^0) = \max_{z_i\in coZ_i, i=\overline{1,l}} \gamma(y^0, z)$ и

$$\int_{t_0}^{t_1} \max_{v\in V(y^0)} (b(t, v, y^0), \psi(t, y^0, z^0))dt = \int_{t_0}^{t_1} (b(t, u^0(t), y^0), \psi(t, y^0, z^0))dt .$$

Используя свойства интеграла Лебега, из последнего равенства получим соотношение (11).

Достаточность. Пусть для некоторой точки глобального минимума $z^0 = (z_1^0, z_2^0, ..., z_l^0), z_i^0 \in coZ_i$ функции $z \to \gamma(y^0, z)$, $z = (z_1, z_2, ..., z_l), z_i \in coZ_i$ выполняются соотношения (10) и (11). Тогда:

$$\mu(u^0, y^0) \ge \gamma(y^0, z^0) = \max_{z_i \in coZ_i, i=\overline{1,l}} \gamma(y^0, z) = \max_{y \in Y} \max_{z_i \in coZ_i, i=\overline{1,l}} \gamma(y, z) =$$

$$= \max_{y \in Y} \max_{u \in U_T(y)} \mu(u, y) \ge \mu(u, y) \, \forall u \in U_T(y), y \in Y,$$

т.е. управление $u^0(\cdot)$ и параметр y^0 – оптимальные в задаче (3).

4. Заключение.

В работе изучена задача управления ансамблем траекторий системы, сформулированной в виде негладкой задачи управления максиминного типа. Для этой задачи получены необходимые и достаточные условия оптимальности. Они дают теоретическое обоснование метода построения решения задачи (3) с помощью решения конечномерных задач вида (10) и (11). Конечномерную задачу минимизации функции (10) можно решить методами математического программирования [2,3]. Таким образом, решение рассмотренной в работе негладкой задачи оптимального управления приводится к решению задач конечномерной оптимизации.

Литература

1. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. –М.: Наука, 1979.
2. Базара М., Шетти К. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы. М.: Мир, 1982.
3. Демьянов В.Ф., Васильев Л.В. Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981.
4. Демьянов В.Ф., Рубинов А.М. Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. – М.: Наука, 1990.
5. Константинов Г.Н. Достаточные условия оптимальности для минимаксной задачи управления ансамблем траекторий // Докл. АН СССР, 1987, Т. 297, № 2. – с. 287-290.
6. Конюховский П. В. Математические методы исследования операций в экономике. - СПб: Питер, 2000.
7. Кейн В.Н. Оптимизация систем управления по минимаксному критерию. – М.: Наука, 1985.
8. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. – М.: Наука, 1988.
9. Куржанский А. Б. Управление и наблюдение в условиях неопределённости. –М: Наука, 1977.
10. Обен Ж.-П. Нелинейный анализ и его экономические приложения. –М.: Мир, 1988.
11. Отакулов С. Задачи управления ансамблем траекторий дифференциальных включений. Lambert Academic Publishing, 2019.
12. Плотников А.В. Задача управления пучками траекторий. Сибирский матем. журн. -1992. -33, № 2. –с. 196-199.
13. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. – М.: Наука, 1980.
14. Половинкин Е.С. Многозначный анализ и дифференциальные включения. –М.: Физматлит, 2015.
15. Черноморов Г.А. Теория принятия решений. – Новочеркасск: 2002.
16. Отакулов С., Хайдаров Т.Т. Условия оптимальности в негладкой задаче управления для динамической системы с параметром. Colloqium-journal. Miedzynarodowe czasopismo naukowe. № 13(66), 2020. с. 18-22.
17. Otakulov S., Haydarov T.T., Sobirova G. D**.** The minimax optimal control problem for dynamic system with parameter and under conditions of indeterminacy. International Conference on Digital Society, Innovations &Integrations of Life in New Centuru, Januar 2021. International Enjineering Journal for Research & Development(IEJRD), ICDSIIL-21 Issue. pp. 279-282.